Prüfung = Gaußtest

Eine entsprechende Formel gilt für den zweiseitigen Gaußtest: mit $z_{\alpha/2}$ anstelle von z_α

$$\boxed{n \ge \left(\frac{(z_{\alpha/2}+z_{\beta max})\,\sigma}{\mu-\mu_0}\right)^2}$$

mit Ablehnungskriterium: $\boxed{\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| > z_{\alpha/2}}$

für 2 seitigen Gaußtest

Analog für den t-Test (bei unbekanntem σ): $\boxed{|\dots| > t_{n-1,\alpha/2}}$

Der Binomialtest ebenfalls ein- und zweiseitig

$H_0: p \ge p_0$ (bzw. $p \le p_0$) und $H_0\, p = p_0$

Testgröße: $x_1+\dots+x_n$ („Trefferzahl") mit $x_i \in \{0,1\}$

bestimmt durch

kritischer Bereich für $H_0: p \ge p_0$: $K := \{0,1,\dots,k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0 \mid g_{n,k+1}(p_0) \ge 1-\alpha_{max}\}$ mit ↳da einseitig

$$g_{n,l}(p) := \sum_{j=l}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \qquad (n,l \in \mathbb{N}_0)$$

Zahlenbeispiel: $\alpha_{max} := 13\%$ als obere Schranke für den Fehler 1. Art; $H_0: p \ge p_0 = 60\%$; $n := 100$

$$\binom{100}{100}\cdot 0{,}6^{100}\cdot 0{,}4^{0} + \binom{100}{99}0{,}6^{99}\cdot 0{,}4^{1} + \dots + \binom{100}{99}\cdot 0{,}6^{90}\cdot 0{,}4^{10} \approx 0$$

Bedingung $\Sigma\dots \ge 1-\frac{13\%}{2} = 0{,}935$ (-> Programmierung oder Näherung!)

welcher Parameter p

15.05.2014 • **Gütefunktion des einseitigen Binomialtests** von $H_0: p \ge p_0 = 60\%$: $g(p) = 1-g_{n,k+1}(p)$ für $p \le p_0$

(und $g(p) := g(p_0)$ für $p > p_0$) und mit $k := \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid g_{n,k+1}(p_0) \ge 1-\alpha_{max}\}$

10 **Gütefunktion des zweiseitigen Binomialtests** von $H_0: p \ge p_0$ ($:= 60\%$) $\cdot\, g(p)$

$$\boxed{g(p) := 1 + g_{n,l}(p) - g_{n,k+1}(p) = 1-\sum_{j=k+1}^{l-1}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}}$$

mit den kritischen Grenzen (k)
$$\boxed{\begin{aligned} k &:= \max\left\{k \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, g_{n,k+1}(p_0) \ge 1-\frac{\alpha_{max}}{2}\right\} \\ l &:= \min\left\{l \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, g_{n,l}(p_0) \le \frac{\alpha_{max}}{2}\right\} \end{aligned}}$$

Zahlenbeispiel: $p_0 = 60\%$, $\alpha_{max} := 13\%$, $n := 100 \overset{(R)}{\Longrightarrow} k = 52,\ l = 68$

Ergebnis: Wenn das Schussergebnis in $[0,52] \cup [68,100]$ liegt, dann wird H_0 abgelehnt (mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\le 13\%$)

Im Fall $p := 50\%$ oder $p := 70\%$ ergibt sich eine erstaunliche Annahmewahrscheinlichkeit von

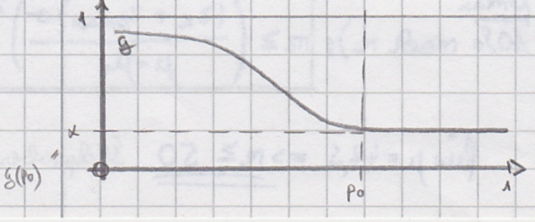
da Fehlerwahrscheinlichkeit

$$1-g(p) = \cancel{1}-\sum_{j=53}^{67}\binom{100}{j}\underbrace{0{,}5^j\cdot 0{,}5^{100-j}}_{0{,}5^n = 0{,}5^{100}} = \cancel{1-}0{,}5^{100}\sum_{j=53}^{67}\binom{100}{j} \approx 30\%$$

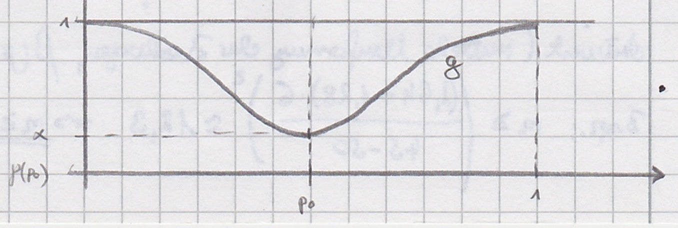
Fehler 2. Art von 30% ↳ nicht ganz so viel wie bei Ablehnung (Fehler 1. Art)

Qualitative Skizze der Gütefunktion

1) einseitig



2) zweiseitig



15

14 Q5 **3.9.1 Der sequentielle LQ-Test (A. Wald)** zum Abwägen zweier Hypothesen $H_0: \vartheta = \vartheta_0$ und $H_1: \vartheta = \vartheta_1$

gegeneinander; ($\vartheta_0, \vartheta_1 \in \mathbb{R}$). Dichtefunktion p_ϑ (diskret oder stetig). Testgröße $T_n(x_1 \dots x_n)$

in Abhängigkeit für Stichprobenumfang n

$$T_n(x_1 \dots x_n) := \prod_{j=1}^{n} \frac{p_{\vartheta_1}(x_j)}{p_{\vartheta_0}(x_j)}$$ -> Entscheidung je nach Größe für H_0 ($T_n<1$) oder H_1 ($T_n>1$)

α & β vorgegeben -> n wählen Schritt für Schritt

$$\boxed{\Rightarrow P_{\vartheta_0}\left\{T_n \ge \frac{1-\beta}{\alpha}\right\} \le \alpha \;(1) \quad ; \quad P_{\vartheta_1}\left\{T_n \le \frac{\beta}{1-\alpha}\right\} \le \beta \;(0)}$$ für beliebige $\alpha, \beta \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[$

Test: Man erhöht den Testumfang $n \in \mathbb{N}$ so lange bis entweder (0) (-> H_0) oder (1) (-> H_1). Entscheidung für. Die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Ablehnung von H_0 bzw. H_1 beträgt dann höchstens α bzw. β.

Bsp.: Der LQ-Binomialtest von $H_0: p = p_0 = 60\%$; $H_1: p = p_1 := 50\%$

Schusstest: $n := 50$, $m := 33$ Treffer (Ergebnis) Weil die Testgröße $T_n(x_1 \dots x_n)$ mit $x \in \{0,1\}$ nicht von der Reihenfolge der x_i abhängt, ist hier $\boxed{T_n(m) := \frac{p_1^{m}(1-p_1)^{n-m}}{p_0^{m}(1-p_0)^{n-m}}}$ als Testgröße entscheidend. (Beobachtete Trefferzahl)

In unserem Zahlenbeispiel ergibt sich $T_{50}(33) \approx 0{,}11 < \frac{1}{9} = \frac{\beta}{1-\alpha}$ (0) für $\alpha := \beta := 10\%$ (selbst gewählt, mit 10% Fehler machen kann)

da <1 ; für >1 $\Rightarrow \frac{1-\beta}{\alpha}$

-> H_0 wird akzeptiert (~~er muss noch mehr üben~~)

Zum Vgl.: Stichprobenumfang $n := 100$ beim einseitigen Binomialtest von $H_0: p \ge p_0 := 60\%$ liefert ein Fehler 2. Art $\beta(p_1 := 50\%) \approx 24\% > \beta$

Aufgaben 3.8.1 – c) ist Schätzer (3 Kapitel) ; 3.8.2) Stichprobenumfang   Aufgaben 2.3

④ Zuverlässigkeitsrechnung (ZR)

15 Def.: Für die zufällige Lebensdauer X (in Zeiteinheiten) einer sog. "Betrachtungseinheit" (z.B. Bauteil, Festplatte) heißt

Reliability

$R(t) := P\{X > t\} = 1 - \underbrace{P\{X \le t\}}_{\text{kumulative Verteilungsfkt. als Fkt. von t}} \quad (= 1 - F_X(t))$ die Zuverlässigkeit(sfunktion)

Bem.: Im ZR wird aus den Zuverlässigkeiten R_i ($i \in \mathbb{N}_n$) einzelner Einheiten/Komponenten die (Gesamt-)Zuverlässigkeit R des Systems berechnet. Dabei ist das sog. „Zuverlässigkeitsschaltbild" (ZSB) verantwortlich dafür, wie aus den R_i das R berechnet wird.

16 Bsp.: a) Serielles System —[K_1]—[K_2]— … —[K_n]— ($n \in \mathbb{N}$) mit Einzel-Zuverlässigkeiten $R_1 \dots R_n$. Das (Gesamt-)System ist per Def. genau dann intakt, wenn jede einzelne Komponente K_i intakt ist.

Überlegung: unabhängige Lebensdauern X_i ; Gesamtlebensdauer X (unabhängig)

$$P\{X > t\} = P\{X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t\} \overset{\text{unabhängig}}{=} P\{X_1 > t\} \cdot P\{X_2 > t\} \cdot \ldots P\{X_n > t\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 \cdot \ldots \cdot R_n}$$